L'assimilazione dati come problema di dinamica nonlineare

Anna Trevisan (1), Francesco Uboldi (2), Alberto Carrassi (3,4)

(1) ISAC-CNR, Bologna; *e-mail*: A.Trevisan@isac.cnr.it

(2) Novate Milanese (MI); *e-mail*: uboldi@magritte.it

(3) IRM, Bruxelles, Belgium; *e-mail*: carrassi@oma.be

(4) Dip. di Fisica, Università degli Studi di Ferrara

Convegno nazionale di fisica della terra fluida e problematiche affini - Ischia (Na) 11-15 giugno 2007

assimilazione dati

nei metodi variazionali si minimizza:

$$2J = \left(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b\right)^{\mathsf{T}} \mathbf{B}^{-1} \left(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b\right) + \{\mathcal{H}\left[\mathcal{M}\left(\mathbf{x}^a\right)\right] - \mathbf{y}^o\}^{\mathsf{T}} \mathbf{R}^{-1} \{\mathcal{H}\left[\mathcal{M}\left(\mathbf{x}^a\right)\right] - \mathbf{y}^o\}$$

metodi sequenziali e ciclo analisi-forecast:

$$\mathbf{x}^f_{k+1} = \mathcal{M}\left(\mathbf{x}^a_k\right)$$

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^f + \mathbf{K}\left[\mathbf{y}^o - \mathcal{H}\left(\mathbf{x}^f\right)\right]$$

filtri di Kalman: evoluzione delle covarianze:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^f\mathbf{H}^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{H}\mathbf{P}^f\mathbf{H}^{\mathsf{T}} + \mathbf{R}\right)^{-1}$$

$$\mathbf{P}^a = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}\right)\mathbf{P}^f$$

$$\mathbf{P}^f_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{P}^a_k\mathbf{M}^{\mathsf{T}} + \mathbf{Q}_{k+1}$$

instabilità della traiettoria e crescita degli errori

i modelli dell'atmosfera e dell'oceano sono sistemi non-lineari caotici, caratterizzati da sensibilità alle condizioni iniziali

- la crescita di piccole perturbazioni è vincolata dalla struttura locale dell'attrattore del sistema

- la crescita avviene principalmente lungo le direzioni instabili

- le direzioni instabili e il *growth rate* dipendono dallo stato e cambiano lungo la traiettoria del sistema (*flow dependent instability*)

esponenti e vettori di Lyapunov; sottospazi di Oseledec (1968) sistema libero

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathcal{M}\left(\mathbf{x}_k\right)$$

$$\delta\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}\delta\mathbf{x}_k$$

sistema FORZATO dalla periodica assimilazione di osservazioni:

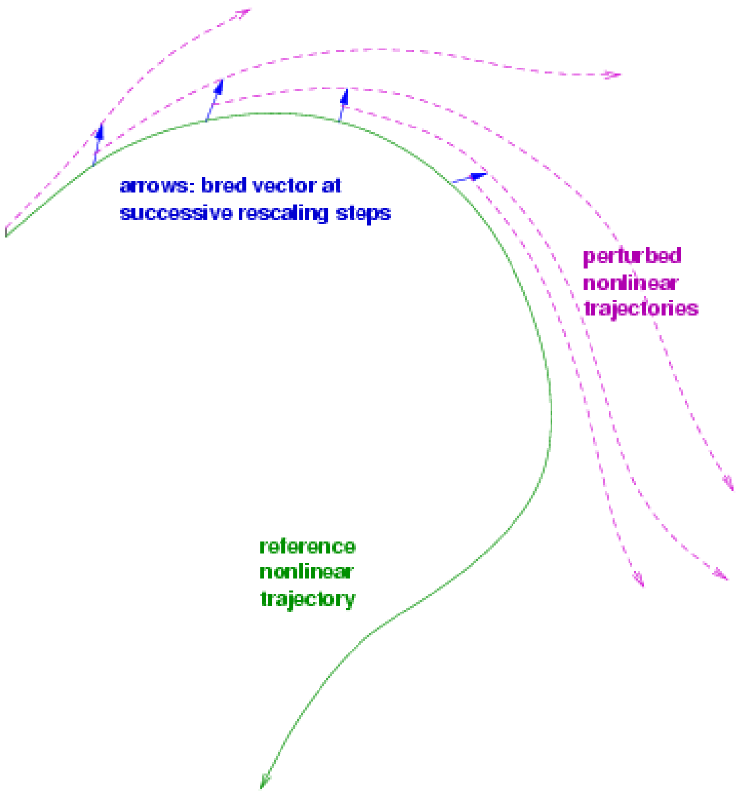
$$\mathbf{x}^a_{k+1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathcal{H}\right)\mathcal{M}\left(\mathbf{x}^a_k\right) + \mathbf{K}\mathbf{y}^o_{k+1}$$

$$\delta\mathbf{x}^a_{k+1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}\right)\mathbf{M}\delta\mathbf{x}^a_k$$

stima delle direzioni instabili: BREEDING

- stato perturbato - controllo = perturbazione

- piccola perturbazione iniziale; integrazione nonlineare del controllo e dello stato perturbato; rinormalizzazione periodica della perturbazione (che cresce) per imporre crescita lineare (ma lungo la traiettoria non-lineare)



stima delle direzioni instabili: BREEDING

- perturbazioni inizialmente independenti collassano su una sola direzione (in un tempo idealmente infinito: di fatto in un tempo finito, più o meno lungo)

- MOLTE perturbazioni inizialmente independenti collassano su POCHE direzioni in un tempo BREVE!

- instabilità su diverse scale di tempo ed energia sistema libero: standard breeding

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathcal{M}\left(\mathbf{x}_k\right)$$

$$\delta\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}\delta\mathbf{x}_k$$

sistema FORZATO: BDAS: “Breeding on the Data Assimilation System”:

$$\mathbf{x}^a_{k+1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathcal{H}\right)\mathcal{M}\left(\mathbf{x}^a_k\right) + \mathbf{K}\mathbf{y}^o_{k+1}$$

$$\delta\mathbf{x}^a_{k+1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}\right)\mathbf{M}\delta\mathbf{x}^a_k$$

stabilità

l'assimilazione di osservazioni ha in generale un effetto stabilizzante (che non è sempre garantito)

- misura della (in)stabilità: primo esponente di Lyapunov (del sistema forzato dai dati)

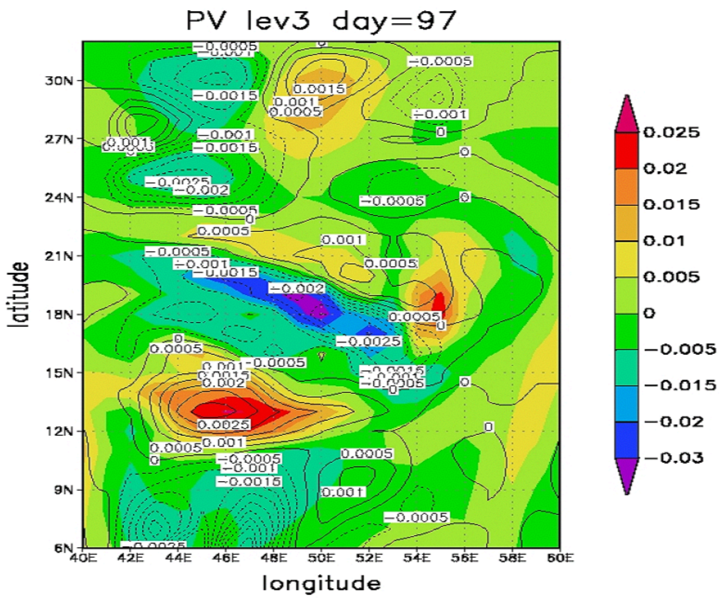
- stabilità $\equiv$ primo esponente negativo

- stabilità $\Rightarrow$unicità della traiettoria del sistema forzato dai dati

- la stabilità **non** implica la convergenza allo stato vero (riduzione degli errori a zero)!

osservazioni mirate (adattive) e BDAS

i *bred vector* forzati contengono le direzioni instabili che non sono (ancora) state individuate e neutralizzate per mezzo delle osservazioni



...è lì che le osservazioni (potendo) vanno messe!

OVVERO: si valuta la capacità del sistema osservativo (componenti fisse e adattive) di individuare tutte le strutture instabili presenti nel sistema

AUS "Assimilation in the Unstable Subspace"

un'importante componente del *forecast error* appartiene al sottospazio instabile :

$$\boldsymbol{\eta}^f = \mathbf{E}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\xi}$$

l'idea è di usare parte delle osservazioni disponibili (quelle che "vedono" le strutture instabili) per individuare ed eliminare (o almeno ridurre) questa componente

come: vincolando la matrice di covarianza del *forecast error*: $\mathbf{P}^f \simeq \mathbf{E}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{E}^{\mathsf{T}}$

la *gain matrix* diventa:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_E &= \mathbf{E}\left[\boldsymbol{\Gamma}^{-1} + (\mathbf{HE})^{\mathsf{T}}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{HE})\right]^{-1}(\mathbf{HE})^{\mathsf{T}}\mathbf{R}^{-1} \\
&= \mathbf{E}\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{HE})^{\mathsf{T}}\left[(\mathbf{HE})\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{HE})^{\mathsf{T}} + \mathbf{R}\right]^{-1}
\end{aligned}$$

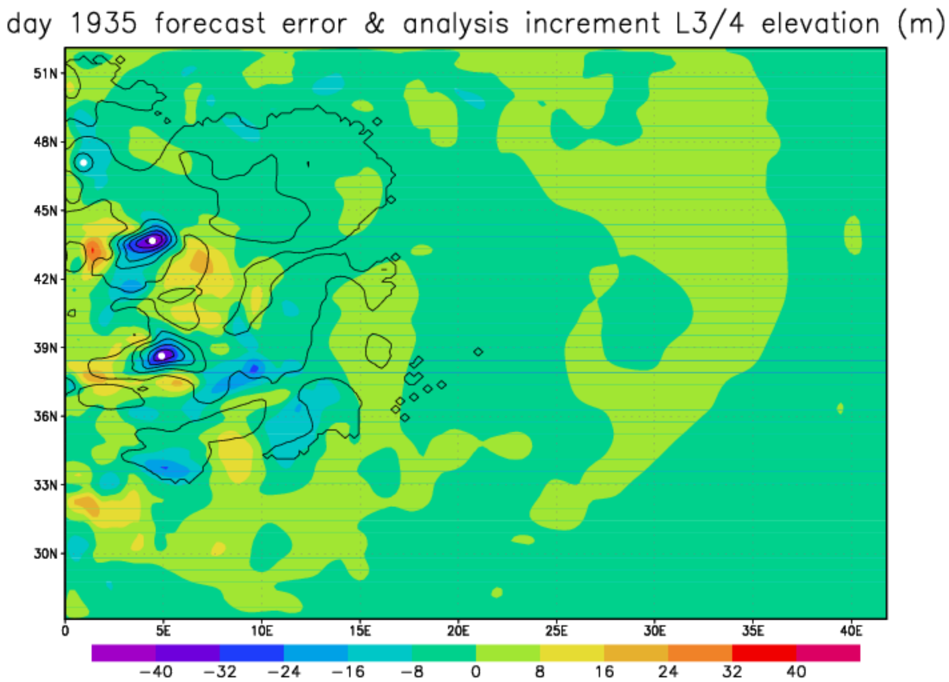
AUS - un solo vettore: $\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^f + \mathbf{e}\,\frac{(\mathbf{He})^{\mathsf{T}}\mathbf{R}^{-1}\left[\mathbf{y}^o - \mathcal{H}\left(\mathbf{x}^f\right)\right]}{\gamma^{-2} + (\mathbf{He})^{\mathsf{T}}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{He})}$

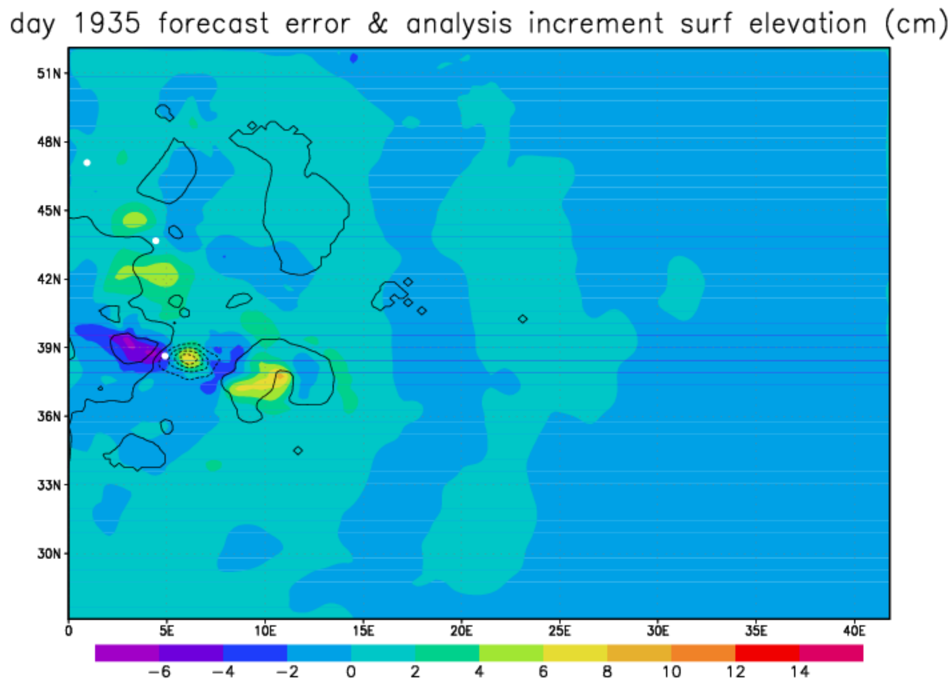
- l'incremento dell'analisi $\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^f$ ha la direzione della struttura instabile $\mathbf{e}$ (presente in un *bred vector* forzato)

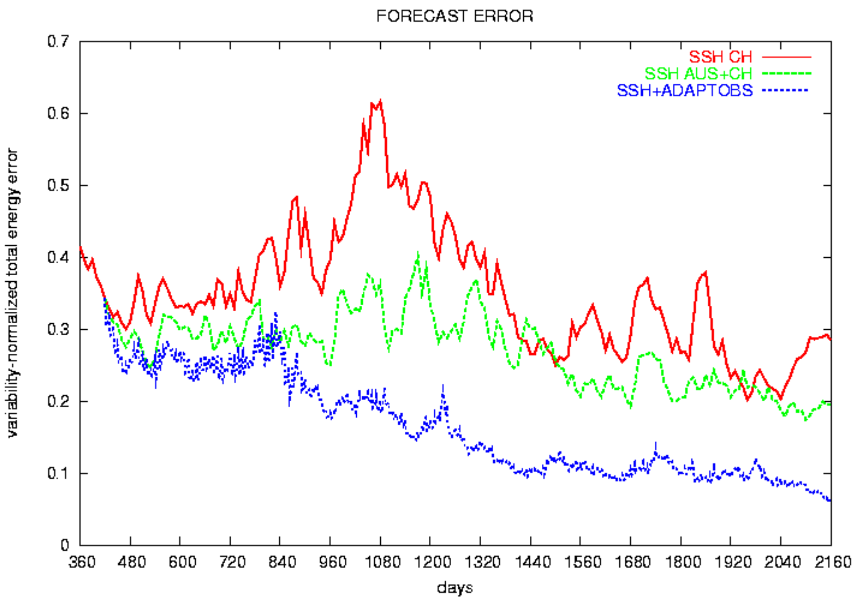
- le osservazioni sono usate per stimare l'ampiezza (scalare) della correzione

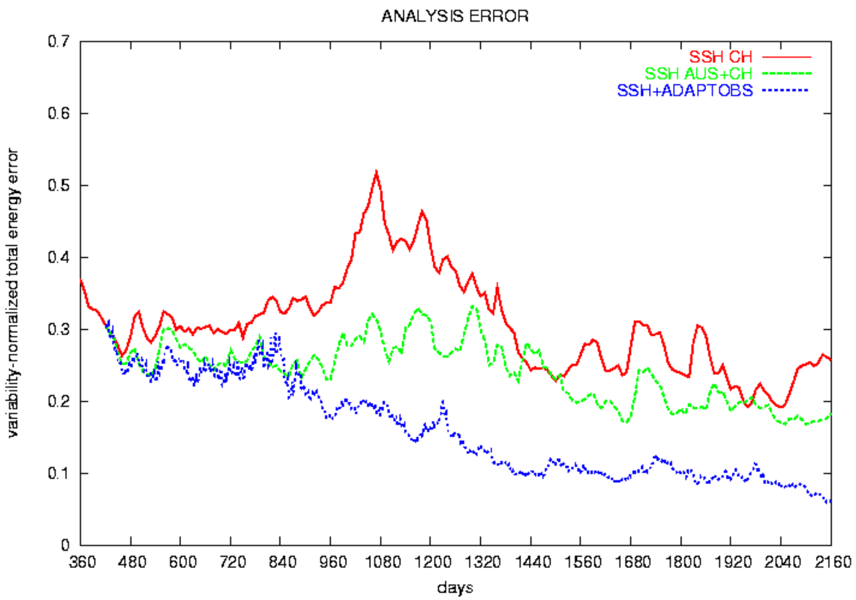
- osservazioni mirate: scegliere le componenti dell'operatore di stima delle osservazioni $\mathbf{H}$ in modo che $(\mathbf{He})^{\mathsf{T}}\,\mathbf{R}^{-1}\,(\mathbf{He})$ sia dominante su γ^{-2}

caso di una sola osservazione perfetta ($\mathbf{He}$ scalare): $\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^f + \mathbf{e}\,\frac{y^o - \mathcal{H}\left(\mathbf{x}^f\right)}{\mathbf{He}}$


day 1935 forecast error & analysis increment L3/4 elevation (m)
51N
48N
45N
42N
39N
36N
33N
30N
0
5E
10E
15E
20E
25E
30E
35E
40E
−40 −32 −24 −16 −8 0 8 16 24 32 40


day 1935 forecast error & analysis increment surf elevation (cm)
51N
48N
45N
42N
39N
36N
33N
30N
0
5E
10E
15E
20E
25E
30E
35E
40E
−6 −4 −2 0 2 4 6 8 10 12 14


FORECAST ERROR
SSH CH
SSH AUS+CH
SSH+ADAPTOBS
variability-normalized total energy error
days
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
360
480
600
720
840
960
1080
1200
1320
1440
1560
1680
1800
1920
2040
2160


ANALYSIS ERROR
SSH CH
SSH AUS+CH
SSH+ADAPTOBS
variability-normalized total energy error
days
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
360
480
600
720
840
960
1080
1200
1320
1440
1560
1680
1800
1920
2040
2160

Esperimenti con un canale QG in una configurazione "*Limited Area Model*" idealizzata (Carrassi et al., 2006):

- il modello ad area limitata è forzato dalle condizioni al contorno laterali

- il *boundary forcing* ha un effetto stabilizzante

- al diminuire dell'estensione dell'area limitata, aumenta la stabilità

- nei casi instabili, la stabilità può essere ottenuta per mezzo dell'assimilazione dati (riduzione errori)

- il numero e la frequenza di osservazioni necessari per controllare il sistema dipendono dal numero e dai *growth rates* delle direzioni instabili

- evoluzione nel tempo delle direzioni instabili e osservazioni a tempi diversi

- errore intrinseco al modello e direzioni instabili

- applicazioni a sistemi operativi e osservazioni reali

Trevisan and Uboldi, *J. of Atmos. Sci.*, 2004

Uboldi, Trevisan and Carrassi, *Nonlin. Processes Geophys.*, 2005

Uboldi and Trevisan, *Nonlin. Processes Geophys.*, 2006

Carrassi, Trevisan and Uboldi, *Tellus*, 2007

download: **http://www.magritte.it/francesco.uboldi/**

email: **uboldi@magritte.it**